CEVAPLAR

1) i) $b \wedge (a' \vee b) = b$
$b' \wedge (a \vee b') = b'$
$\Rightarrow [b \wedge (a' \vee b)] \wedge [b' \wedge (a \vee b')] = b \wedge b'$
$= 0$

ii) $a \wedge (b' \vee a) = a$
$a' (b \vee a') = a'$
$\Rightarrow [a \wedge (b' \vee a)] \vee [a' \wedge (b \vee a')] = a \vee a'$
$= 1$

2) $d, e \in \mathbb{N}$ olmak üzere
$d.e = 0$ ise $d = 0$ veya $e = 0$ olduğunu gösterelim.

• $d \neq 0$ ve $e \neq 0$ olsun.
$\Rightarrow \exists\, k, k_1 \in \mathbb{N} \ni d = k^+,\ e = k_1^+$
$d.e = k^+ . k_1^+ = (k+1) k_1^+ = k k_1^+ + k_1^+$
$= (k k_1^+ + k_1)^+$

$d.e = 0$ olduğundan $(k k_1^+ + k_1)^+ = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır.

$\therefore d = 0$ veya $e = 0$ dır.

3) $a, b \in \mathbb{N}$ olsun.
$-1 < [a,b] < 1$ ise $a = b$ olduğunu göstermeliyiz.

$a \neq b$ olsun.
$\Rightarrow a < b$ veya $b < a$ ($\mathbb{N}$ iyi sıralı olduğundan)

• $a < b \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* \ni b = a + k$
$\Rightarrow [a,b] = [a, a+k] = [0,k] \leq -1$ olur.
$\Rightarrow [a,b] \leq -1$ çelişkisi elde edilir.

• $b < a \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* \ni a = b + k_1$

$\Rightarrow [a,b] = [b+k_1, b] = [k_1, 0] \geq 1$ olur.

$\Rightarrow [a,b] \geq 1$ çelişkisi elde edilir.

$\therefore \; a = b$

$[a,b] = [a,a]$ olup -1 ile 1 arasında sıfırdan farklı bir tamsayı yoktur.

4) $a = [(x,y)]$, $b = [(c,d)]$ olsun.

$a < b \Rightarrow [(x,y)] < [(c,d)]$

$\Rightarrow xd < yc$

$a^2 = [(x,y)][(x,y)] = [(x^2, y^2)]$

$ab = [(x,y)][(c,d)] = [(xc, yd)]$

$b^2 = [(c,d)][(c,d)] = [(c^2, d^2)]$

• $xd < yc \Rightarrow (xy)(xd) < (xy)(yc)$

$\Rightarrow x^2yd < y^2xc$

$\Rightarrow [(x^2, y^2)] < [(xc, yd)]$

$\Rightarrow a^2 < ab$ --- ①

• $xd < yc \Rightarrow (cd)(xd) < (cd)(yc)$

$\Rightarrow xcd^2 < ydc^2$

$\Rightarrow [(xc, yd)] < [(c^2, d^2)]$

$\Rightarrow ab < b^2$ --- ②

① ve ② den $a^2 < ab < b^2$ elde edilir.

5) $\alpha(\beta+\gamma)\beta = (\alpha(\beta+\gamma))\beta$

$= (\alpha\beta+\alpha\gamma)\beta$

$= (1^*+\alpha\gamma)\beta = 1^*\beta + (\alpha\gamma)\beta$

$= \beta + \alpha(\gamma\beta)$

$= \beta + \alpha(\beta\gamma) = \beta + (\alpha\beta)\gamma$

$= \beta + 1^*\gamma = \beta+\gamma$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ için $N = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$ eşitliğini sağlayan tüm polinomların kümesini A_N ile gösterelim sözünü ettiğimiz türde tüm polinomların kümesi A ile gösterilirse $A = \bigcup A_N$ dır. Her bir A_N kümesi sayılabilirdir. n. dereceden bir polinomun en fazla n tane kökü olduğundan A_N içindeki her bir polinomun en fazla sonlu sayıda kökü vardır. Keyfi sayıda sayılabilir kümenin birleşimi de sayılabilir olduğundan A sayılabilirdir.